Θέματα και Απαντήσεις

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n ο ακέραιος αριθμός $A=81^{3^n}+4^{2n+1}$ είναι σύνθετος.

Λύση:

- Ο αριθμός 3^n είναι φυσικός και μάλιστα μεγαλύτερος του ένα (1), αφού $n \in N^{¿}$. Όλες οι δυνάμεις του 81 έχουν ως τελευταίο ψηφίο τον αριθμό ένα (1).

  Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 81^{3^n} είναι ένα (1).
- Εύκολα διαπιστώνουμε επίσης ότι όλες οι δυνάμεις του τέσσερα με εκθέτη **περιττό** φυσικό αριθμό έχουν ως τελευταίο ψηφίο το τέσσερα. Δηλαδή ο αριθμός 4^{2n+1} λήγει σε τέσσερα (4).
- Συνεπώς , ο αριθμός $A=81^{3^n}+4^{2n+1}$ λήγει σε πέντε (5) και είναι μεγαλύτερος του πέντε (5).

  Άρα διαιρείται πέραν της μονάδας και του εαυτού του και με το πέντε, οπότε είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Λύση:

Είναι:

$$A=1+2+\cdots+1009+1010+1011+\cdots+2018+2019=\frac{1+2019}{2}.2019=1010.2019,$$

$$B=1^2+2^2+\cdots+2019^2=\frac{2019(2019+1)(2.2019+1)}{6}=\frac{2019.2020.4039}{6}=\frac{2019.1010.4039}{3}$$

Και

$$\Gamma=3A+3B+2020=3.1010.2019+3.\frac{2019.1010.4039}{3}+2020\Longrightarrow$$

$$\Gamma = 3.1010.2019 + 2019.1010.4039 + 2020 = 1010(3.2019 + 2019.4039 + 2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Gamma = 1010\left[3.2019 + 2019(2.2019+1) + 2\right] = \cdots = 1010(2.2019^2 + 4.2019 + 2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Gamma = 2.1010(2019^2 + 2.2019 + 1) = 2020.(2019+1)^2 = \cdots = 2020^3.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

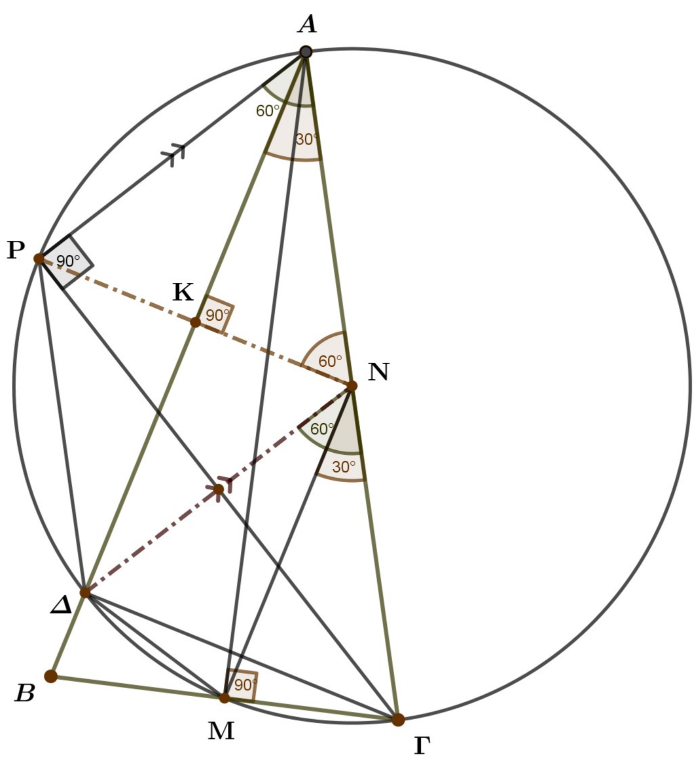
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\,(AB=A\Gamma)\,\mu\varepsilon\ \widehat{A}=30°$ και έστω $M\ \kappa\alpha\iota\ N$ τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ A\Gamma$ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος $C_{A\Gamma M}$ του τριγώνου $A\Gamma M$ τέμνει την πλευρά $AB\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \Delta$.

Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο $N\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\ AB$ και η κάθετη από το σημείο $\Gamma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\nu\ \Delta N$ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{A\Gamma M}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A\Delta N$.

(**Σημείωση**: Σε ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε $OX=OY=OZ$¿.

Λύση:

Η διάμεσος $AM\ \tau o\upsilon\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ AB\Gamma$ είναι ταυτόχρονα και ύψος και διχοτόμος του.



Συνεπώς το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο M.

Είναι γνωστό δε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ισούται με το μισό της.

Δηλαδή είναι:

$$MN = \frac{A\Gamma}{2} = NA = N\Gamma.$$

Επομένως ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AM\Gamma$ έχει κέντρο το σημείο $N\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha:$

$\rho = MN = NA = N\Gamma$.

Υποθέτουμε ότι η κάθετη από το σημείο $N\,\pi\rho o\varsigma\,\tau\eta\nu\,\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\,AB$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον κύκλο $C_{A\Gamma M}\,\sigma\tau o\,\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\,\tau o\upsilon\,P$. Τότε το τρίγωνο $AP\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο P.

Θα δείξουμε τότε ότι η ΓP είναι κάθετη στην $\Delta N\,, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\,\acute{o}\tau\iota: \Gamma P \perp \Delta N$.

Το ευθύγραμμο τμήμα MN που συνδέει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma\,\kappa\alpha\iota\,A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παράλληλο στην $AB\,\kappa\alpha\iota\,\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota: MN = \frac{AB}{2}, M\widehat{N}\Gamma = 30°$.

Είναι επίσης:

$AM\,\delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\,\widehat{A} \Longrightarrow M\,\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\nu\,\tau o\upsilon\,\tau\acute{o}\xi o\upsilon\,\Delta\Gamma$.

Τότε όμως είναι και $M\Delta = M\Gamma\,, o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\,\tau o\,M$ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του $\Delta\Gamma$.

Αλλά είναι και $N\Delta = N\Gamma\,(\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\varepsilon\varsigma\,\tau o\upsilon\,\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon), o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\,\kappa\alpha\iota\,\tau o\,N$ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του $\Delta\Gamma$.

Συνεπώς , η μεσοκάθετος του $\Delta\Gamma\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\,\eta\,MN$. Δηλαδή η $MN\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\,\delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\,\tau\eta\varsigma\,\Delta\widehat{N}\Gamma\,, o\pi\acute{o}\tau\varepsilon:$

$\Delta\widehat{N}M = M\widehat{N}\Gamma = 30° \Longrightarrow \Delta\widehat{N}\Gamma = 60°$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta N\Gamma$ είναι ισόπλευρο , και θα είναι:

$\Delta\Gamma = \Delta N = N\Gamma = NA\,, \Delta\widehat{N}\Gamma = 60°(1)$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AKN\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: A\widehat{N}P = 60°\,, \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\,B\widehat{A}\Gamma = 30°$.

Δεδομένου ότι το τρίγωνο ANP είναι ισοσκελές με $NA = NP\,\kappa\alpha\iota\,A\widehat{N}P = 60°$ τελικά είναι ισόπλευρο.

Άρα $PA = PN = NA\,, P\widehat{A}N = 60°(2)$.

Από τις $(1)\,\kappa\alpha\iota\,(2)\,\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\,\acute{o}\tau\iota\,\Delta N \parallel PA$. Είναι όμως $PA \perp \Gamma P\,, o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\,P\Gamma \perp \Delta N$.

Συνεπώς η κάθετη από το σημείο $N\,\pi\rho o\varsigma\,\tau\eta\nu\,\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\,AB$ και η κάθετη από το σημείο $\Gamma\,\pi\rho o\varsigma\,\tau\eta\nu\,\Delta N$ τέμνονται στο σημείο P του κύκλου $C_{A\Gamma M}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το σημείο P είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A\Delta N$.

Πράγματι:

Αφού είναι $\Delta\widehat{N}\Gamma = 60°\,\kappa\alpha\iota\,A\widehat{N}P = 60°$ θα είναι και: $P\widehat{N}\Delta = 60°$.

Το τρίγωνο $PN\Delta$ είναι ισοσκελές με $NP = N\Delta\,\kappa\alpha\iota\,P\widehat{N}\Delta = 60°$. Επομένως τελικά είναι ισόπλευρο.

Άρα $NP = N\Delta = \Delta P(3)$. Από τις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι:

$PA = P\Delta = PN = \Delta N = NA(4)$.

Επομένως το σημείο P είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A\Delta N$.

Σημείωση: **Να δείξετε επίσης ότι το τετράπλευρο $AP\Delta N$ είναι ρόμβος και ότι $MP=\rho\sqrt{2}$.**